Module Physique I
Contrôle final
Durée 1h30

Exercice 1 :

Considérons un point matériel M de masse m qui décrit dans un référentiel fixe $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, supposé galiléen, une trajectoire située dans un plan (XOY) tel que l'accélération du point M passe toujours par un point fixe O (mouvement à accélération centrale).

Un mouvement est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout instant t, le vecteur accélération du point M, $\vec{\gamma}(M/R)$, est colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (voir figure 1). Il en découle :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \vec{0}$$

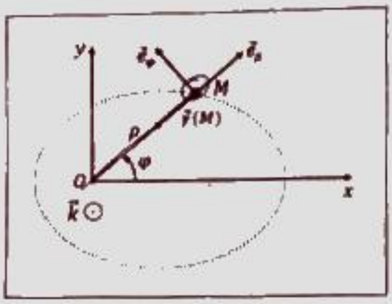

Figure 1.

1) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.
2) Démontrer l'expression de vecteur vitesse et accélération de M en coordonnées polaires.

Soit $\vec{C}$ le vecteur défini par : $\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$

3) Montrer que $\vec{C}$ est un vecteur constant.
4) Donner l'expression de $\vec{C}$ en coordonnées polaires (ρ, φ).
5) Déterminer le module de $\vec{C}$ en fonction de ρ et $\dot{\varphi}$. Déduire de $C = cte$ que :
$$2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0$$
6) On pose $u = \frac{1}{\rho}$, montrer que : $\vec{V}(M/R) = -C\frac{du}{d\varphi}\vec{e_\rho} + Cu\vec{e_\varphi}$

Exercice 2 :

Une barre [AB] de longueur 2L reste toujours dans le plan vertical (O_0, Y_0, Z_0). Ses extrémités A et B se déplacent respectivement sur l'axe vertical O_0Z_0 et sur l'axe horizontal O_0Y_0 (voir figure 2). On considère le référentiel R_0 (O_0, X_0, Y_0, Z_0) absolu de base orthonormée directe $(\vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$ et le référentiel R(A, X, Y, Z) relatif par rapport à R_0 de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tel que l'axe Ay est porté par la barre [AB]. On pose $\alpha(t)=\omega t$ l'angle entre l'axe AO_0 et l'axe AY (ω est une constante positive et t est le temps). Une particule M est en mouvement sur la barre [AB] et est définie, dans le repère R par le vecteur $\overrightarrow{AM} = V_0 t\vec{j}$ (V_0 est une constante positive). On donne le module $\|\overrightarrow{O_0A}\| = V_0 t$. Le champ de pesanteur est représenté par $\vec{g}$ (voir figure 2).

Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire Khouribga

Année Universitaire 2019- 2020
Filière : SMIA / S1
Pr. FAIZ

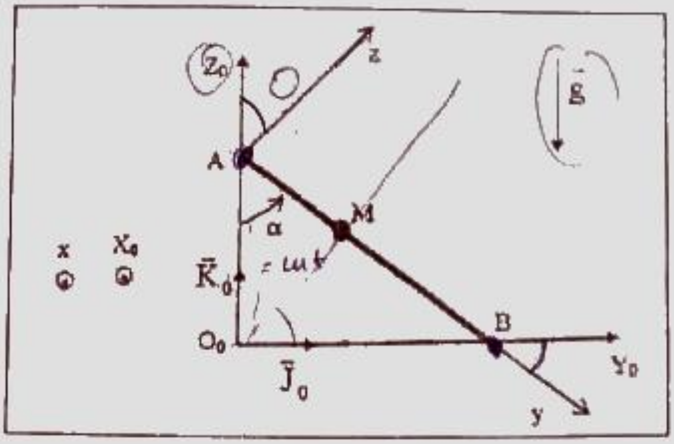

Figure 2

1) Déterminer la vitesse de A par rapport à R_0
2) Déterminer la vitesse de B par rapport à R_0
3) Déterminer la vitesse de B par rapport à R
4) Dans la base $(\vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0})$.
   a. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{O_0M}$
   b. Montrer que l'équation de la trajectoire de M par rapport à R_0 est de la forme :
   $$Y_M^2 + (Z_M - V_0t)^2 = (V_0t)^2$$
   c. Préciser la nature de cette trajectoire à un instant t fixe.
   d. Déduire, à partir de $\overrightarrow{O_0M}$, la vitesse et l'accélération de M.
5) Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   a. Exprimer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_r(M)}$ et $\overrightarrow{V_e(M)}$ en déduire $\overrightarrow{V_a(M)}$.
   b. Exprimer les vecteurs accélérations $\overrightarrow{\gamma_r(M)}$, $\overrightarrow{\gamma_c(M)}$ et $\overrightarrow{\gamma_e(M)}$ en déduire $\overrightarrow{\gamma_a(M)}$.
6) On suppose que sur la barre [AB] exerce, sans frottement, sur M une réaction $\vec{N}$, déterminer les composantes de cette réaction.